MODULAZIONE DI FREQUENZA ANALOGICA

ESERCIZIO 15

Si consideri la demodulazione con discriminatore di frequenza di una portante modulata FM. Calcolare il rapporto segnale-rumore dopo la demodulazione ($\mathrm{SNR}_{\mathrm{post}}^{\mathrm{FM}}$) con e senza circuiti di preenfasi e deenfasi. La risposta in frequenza del filtro di deenfasi è pari a

$$H_{de}(f) = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_{3\mathrm{dB}}}}.$$

<u>*Soluzione*</u>

L'espressione della portante modulata FM è la seguente

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t)) \tag{15.1}$$

dove A_c è l'ampiezza della portante, f_c è la frequenza della portante, k_f è il *fattore di sensibilità in frequenza* del modulatore e

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \tag{15.2}$$

in cui $m(t)$ rappresenta il segnale modulante. Il segnale FM ricevuto $s(t)$ ha una frequenza portante f_c e una banda di trasmissione B_T, tali che una quantità trascurabile di potenza si trova fuori dalla banda di frequenza $f_c \pm B_T/2$ per frequenze positive, e in modo analogo per frequenze negative.

Si considera il modello di ricevitore mostrato in figura 15.1, dove $w(t)$ rappresenta il rumore AWGN a media nulla e con densità spettrale di potenza $S_W(f) = N_0/2$ W/Hz. Il demodulatore FM è costituito da un filtro passa banda, un limitatore, un discriminatore e un filtro passa basso. Il filtro passa banda ha una frequenza centrale f_c e una banda B_T, così da lasciare passare il segnale FM senza distorsione. Comunemente, B_T è piccola rispetto alla frequenza centrale f_c, così che è

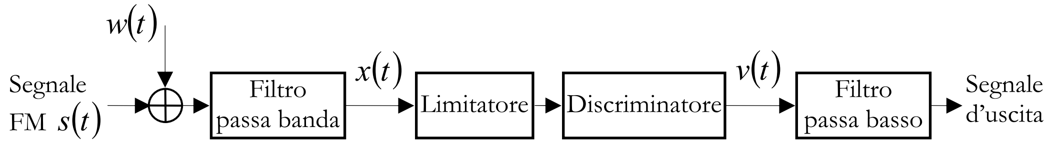

Fig. 15.1: Modello del ricevitore FM.

possibile usare la rappresentazione a banda stretta per $n(t)$, che è la versione filtrata del rumore di canale $w(t)$. Il valore del rapporto segnale-rumore prima della demodulazione ($\mathrm{SNR}_{\mathrm{pre}}^{\mathrm{FM}}$) è semplicemente il rapporto tra la potenza della portante $A_c^2/2$ e la potenza del rumore filtrato dal filtro passa banda $N_0 B_T$, cioè

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{pre}}^{\mathrm{FM}} = \frac{A_c^2}{2N_0 B_T}.$$

In un sistema FM, il segnale $m(t)$ imprime variazioni della frequenza istantanea della portante. L'ampiezza della portante è costante. Di conseguenza tutte le variazioni dell'ampiezza della portante all'ingresso del ricevitore sono causate da rumore o da interferenza. Il limitatore d'ampiezza, in cascata al filtro passa banda nel modello del ricevitore della figura 15.1, è un circuito non lineare usato per rimuovere le variazioni d'ampiezza della portante modulata. Il segnale alla sua uscita è quasi rettangolare e dunque è filtrato da un altro filtro passa banda, che fa parte del limitatore, per sopprimere le armoniche della frequenza portante generate dal limitatore. Il discriminatore nel modello di figura 15.1 è costituito da due componenti

1. Un **derivatore**, che genera un segnale modulato in modo ibrido, nel quale sia l'ampiezza che la frequenza variano in funzione del segnale modulante.

2. Un **demodulatore ad inviluppo**, che recupera la variazione d'ampiezza e riproduce il segnale.

Il filtro dopo la demodulazione, indicato come “filtro passa basso” in figura 15.1 ha una banda che è abbastanza larga da far passare le frequenze fino alla frequenza più alta del segnale modulante. Questo filtro rimuove le componenti del rumore fuori banda presenti all'uscita del discriminatore e quindi limita al minimo l'effetto del rumore uscente.

Il segnale FM rumoroso dopo il filtro passa banda può essere rappresentato come

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

dove $s(t)$ è il segnale modulato FM e $n(t)$ è il rumore filtrato all'uscita del filtro passa banda. Tale rumore può essere rappresentato in funzione delle componenti in fase e in quadratura come

$$n(t) = n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\sin(2\pi f_c t),$$

In modo equivalente $n(t)$ si può esprimere in termini del suo inviluppo e fase come

$$n(t) = r(t)\cos[2\pi f_c t + \phi_n(t)], \tag{15.3}$$

dove l'inviluppo è $r(t) = \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)}$ e la fase è $\phi_n(t) = \arctan\left(\frac{n_Q(t)}{n_I(t)}\right)$. Una delle proprietà di questa rappresentazione polare è che la fase $\phi_n(t)$ è distribuita uniformemente tra 0 e 2π radianti. Combinando l'equazione (15.2) con le equazioni (15.1) e (15.3), il segnale rumoroso all'uscita del filtro passa banda si può esprimere come

$$x(t) = s(t) + n(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + r(t)\cos[2\pi f_c t + \phi_n(t)].$$

La rappresentazione fasoriale di $x(t)$ è riportata in figura 15.2. L'ampiezza del rumore è $r(t)$ e la differenza di fase $\psi_n(t) = \phi_n(t) - \phi(t)$ è l'angolo tra i fasori del rumore e del segnale. La fase $\vartheta(t)$ della risultante è data da

$$\vartheta(t) = \phi(t) + \arctan\left\{ \frac{r(t)\sin[\psi_n(t)]}{A_c + r(t)[\cos\psi_n(t)]} \right\}.$$

L'inviluppo di $x(t)$ non interessa poiché le sue variazioni sono rimosse dal limitatore. Per ottenere risultati utili, si fanno alcune approssimazioni riguardo $\vartheta(t)$. Per prima cosa si assume che il rapporto portante-rumore misurato all'ingresso del discriminatore sia grande. Se con R si indicano le ampiezze osservate della funzione $r(t)$, realizzazione dell'inviluppo del rumore, allora per la maggior parte del tempo la variabile casuale R è piccola rispetto all'ampiezza della portante A_c. Sotto questa ipotesi e osservando che $\arctan\xi \approx \xi$ dato che $\xi << 1$, l'espressione della fase si semplifica in

$$\vartheta(t) = \phi(t) + \frac{r(t)}{A_c}\sin[\psi_n(t)]. \tag{15.4}$$

L'espressione può essere ulteriormente semplificata trascurando la componente di modulazione al secondo termine dell'equazione e sostituendo $\psi_n(t) = \phi_n(t) - \phi(t)$ con $\phi_n(t)$. Questa approssimazione è lecita, perché la fase $\phi_n(t)$ è distribuita uniformemente tra 0 e 2π radianti e, dato che $\phi(t)$ è indipendente da $\phi_n(t)$, è ragionevole assumere che la differenza di fase $\phi_n(t) - \phi(t)$ sia anch'essa distribuita uniformemente in 2π radianti. Questa ipotesi è valida solo se il rapporto tra la potenza media della portante e la potenza media del rumore è grande. Osservando che la componente in quadratura del rumore è $n_Q(t) = r(t)\sin[\phi_n(t)]$, si può semplificare la (15.4) come

$$\vartheta(t) = \phi(t) + \frac{n_Q(t)}{A_c}. \tag{15.5}$$

Sostituendo l'espressione per $\phi(t)$ fornita dall'equazione (15.2) nella (15.5) si ottiene

$$\vartheta(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau + \frac{n_Q(t)}{A_c}.$$

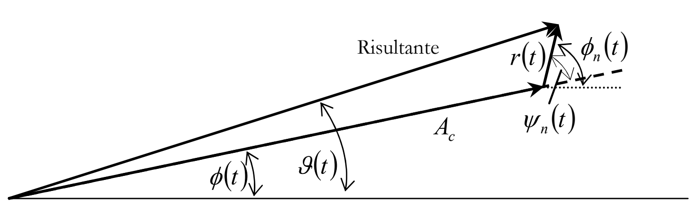

Fig. 15.2: Diagramma dei fasori per il segnale FM sommato al rumore filtrato a banda stretta, assumendo un elevato rapporto tra la potenza della portante e la potenza del rumore.

L'obbiettivo è determinare l'errore nella frequenza istantanea della portante modulata causato dalla presenza del rumore filtrato $n(t)$.

Quando il rapporto portante-rumore è grande, l'uscita del discriminatore ideale, scalata di 2π, è pari a

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\vartheta(t)}{dt} = k_f m(t) + n_d(t) \tag{15.6}$$

dove $k_f m(t)$ rappresenta la componente di segnale utile all'uscita del discriminatore e

$$n_d(t) = \frac{1}{2\pi A_c}\frac{dn_Q(t)}{dt}$$

è il termine di rumore. Il termine di rumore $n_d(t)$ all'uscita del discriminatore è determinato essenzialmente dalla componente in quadratura $n_Q(t)$ del rumore a banda stretta $n(t)$.

Il rapporto segnale-rumore $\mathrm{SNR}_{\mathrm{post}}^{\mathrm{FM}}$ dopo la demodulazione viene utilizzato per valutare la qualità dell'uscita del ricevitore FM. L'$\mathrm{SNR}_{\mathrm{post}}^{\mathrm{FM}}$ è definito come il rapporto tra la potenza media del segnale uscente e la potenza media del rumore uscente. La potenza media del segnale uscente $k_f m(t)$ è data dal valore quadratico medio della deviazione di frequenza impressa dal segnale modulante ed è pari a

$$\Delta f_e^2 = k_f^2 P_m,$$

dove Δf_e rappresenta la deviazione di frequenza efficace e P_m è la potenza media del segnale modulante $m(t)$. Per calcolare la potenza media del rumore uscente, si osserva che il rumore $n_d(t)$ all'uscita del discriminatore è proporzionale alla derivata rispetto al tempo della componente in quadratura del rumore $n_Q(t)$. Dal momento che derivare una funzione rispetto al tempo equivale a moltiplicare la sua trasformata di Fourier per $j2\pi f$, ne segue che è possibile ottenere il rumore $n_d(t)$ facendo passare $n_Q(t)$ attraverso un filtro lineare con risposta in frequenza uguale a

$$G(f) = \frac{j2\pi f}{2\pi A_c} = \frac{jf}{A_c}.$$

Ciò significa che la densità spettrale di potenza $S_{N_d}(f)$ del rumore $n_d(t)$ è legata alla densità spettrale di potenza $S_{N_Q}(f)$ della componente in quadratura del rumore $n_Q(t)$ come segue:

$$S_{N_d}(f) = |G(f)|^2 S_{N_Q}(f) = \frac{f^2}{A_c^2} S_{N_Q}(f).$$

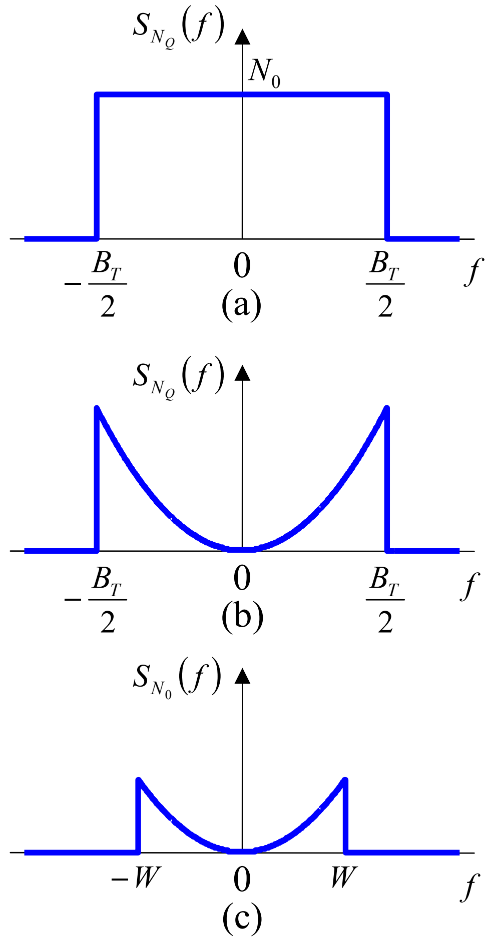

Fig. 15.3: Analisi del rumore del ricevitore FM. (a) Densità spettrale di potenza della componente in quadratura $n_Q(t)$ del rumore a banda stretta $n(t)$. (b) Densità spettrale di potenza del rumore $n_d(t)$ all'uscita del discriminatore. (c) Densità spettrale di potenza del rumore $n_0(t)$ all'uscita del ricevitore.

Poiché il filtro passa banda nel ricevitore di figura 15.1 ha una risposta ideale in frequenza caratterizzata dalla banda B_T e dalla frequenza centrale f_c, segue che il rumore a banda stretta $n(t)$ avrà una densità spettrale di potenza sagomata in modo simile. Se il rumore entrante è bianco, per le proprietà delle componenti in fase e in quadratura del rumore a banda stretta, la densità spettrale di $n_Q(t)$ sarà l'equivalente passa basso della somma delle risposte a frequenze positive e negative del filtro passa banda. Questo significa che la componente in quadratura $n_Q(t)$ del rumore a banda stretta avrà la caratteristica ideale passa basso mostrata in figura 15.3a. La corrispondente densità spettrale di potenza del rumore $n_d(t)$ è mostrata in figura 15.3b ed è pari a

$$S_{N_d}(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0 f^2}{A_c^2}, & |f| < \dfrac{B_T}{2} \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Nel modello del ricevitore di figura 15.1 l'uscita del discriminatore è seguita da un filtro passa basso con una banda W uguale a quella del segnale $m(t)$. Per un segnale FM a banda larga solitamente si trova che W è più piccolo di $B_T/2$. Questo significa che le componenti fuori banda del rumore $n_d(t)$ sono scartate. Pertanto, la densità spettrale di potenza $S_{N_0}(f)$ del rumore $n_0(t)$ che compare all'uscita del ricevitore è definita da

$$S_{N_0}(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0 f^2}{A_c^2}, & |f| < W, \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

come mostrato in figura 15.3c. La potenza media di rumore uscente è calcolata integrando la densità spettrale di potenza $S_{N_0}(f)$ da $-W$ a W ed è pari a

$$P_{N_0} = \int_{-W}^{W} S_{N_0}(f)df = \frac{N_0}{A_c^2}\int_{-W}^{W} f^2 df = \frac{2N_0W^3}{3A_c^2}. \qquad (15.7)$$

Il rapporto segnale-rumore dopo la demodulazione vale

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{post}}^{\mathrm{FM}} = \frac{\Delta f_e^2}{P_{N_0}} = \frac{3A_c^2 \Delta f_e^2}{2N_0W^3}. \qquad (15.8)$$

La formula (15.8), che definisce il rapporto segnale-rumore dopo la demodulazione di un segnale FM, è valida solo se l'SNR prima della demodulazione, misurato all'ingresso del discriminatore, è grande rispetto all'unità. Se l'SNR prima della demodulazione è ridotto, il ricevitore non funziona. All'inizio si sentono caratteristici click all'uscita del ricevitore e, quando il suo valore decresce ulteriormente, i click si trasformano in un crepitio. In corrispondenza e al di sotto di tale valore, l'equazione (15.8) non è in grado di predire esattamente l'SNR dopo la demodulazione. Questo fenomeno è noto come *effetto soglia*.

Enfasi e deenfasi nella modulazione FM

A causa della legge quadratica dello spettro del rumore uscente da un ricevitore FM, il rumore è più grande per grandi valori di $|f|$. Per cercare di contrastare questo effetto si può pensare di includere nel demodulatore un filtro passabasso la cui risposta in frequenza $H_{de}(f)$ è tale da aumentare gradualmente l'attenuazione al tendere di $|f|$ a W. Tale filtro ha il compito di *deenfatizzare* gli effetti del rumore alle alte frequenze. L'introduzione del filtro di deenfasi nel ricevitore se da un lato riduce il rumore dall'altro introduce una distorsione del segnale ricevuto. Per compensare questa distorsione la soluzione che si adotta è quella di predistorcere o *preenfatizzare* in modo appropriato il segnale in banda base al trasmettitore, prima della modulazione FM, usando un filtro con risposta in frequenza

$$H_{\mathrm{pre}}(f) = \frac{1}{H_{de}(f)}, \qquad |f| < W.$$

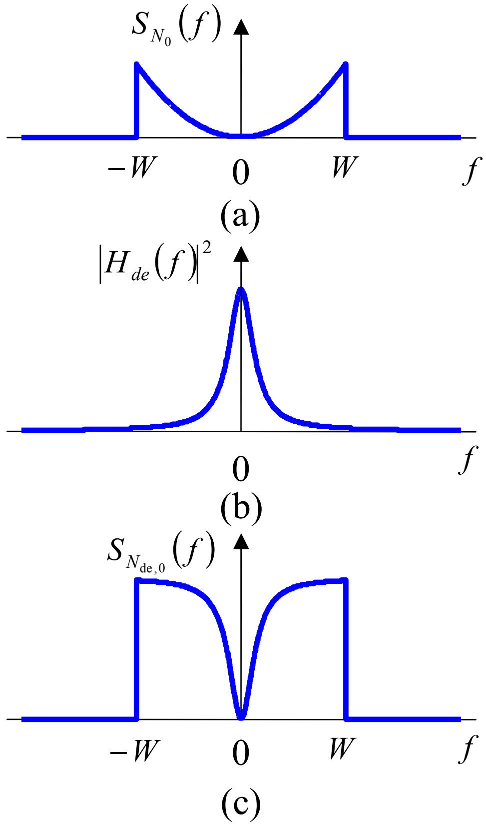

Fig. 15.4: Uso dei filtri di preenfasi e deenfasi in un sistema FM. (a) Spettro del rumore all'ingresso del filtro di deenfasi. (b) Risposta in frequenza del filtro di deenfasi. (c) Spettro del rumore all'uscita del filtro di deenfasi.

Grazie alle funzioni di trasferimento, una l'inverso dell'altra, dei filtri di preenfasi e deenfasi, il segnale recuperato non è distorto e, cosa più importante, con rumore ridotto. Il *filtro di deenfasi* è spesso

un semplice circuito RC passa basso avente risposta in frequenza pari a

$$H_{de}(f) = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{f_{3\mathrm{dB}}}}$$

dove $f_{3\mathrm{dB}}$ definisce la banda a $3\,\mathrm{dB}$. La risposta in frequenza del filtro di deenfasi è la stessa di quella definita nel testo dell'esercizio. L'andamento della risposta in ampiezza per $f_{3\mathrm{dB}} = W/7$ è riportato in figura 15.4b. In figura 15.4c si può osservare che con tale scelta del filtro di deenfasi lo spettro del rumore alla sua uscita si può considerare piatto per $f_{3\mathrm{dB}} < |f| < W$.

Al trasmettitore il filtro di preenfasi è

$$H_{pre}(f) = 1 + j\frac{f}{f_{3\mathrm{dB}}}.$$

Questo filtro ha scarso effetto a frequenze basse per $|f| < f_{3\mathrm{dB}}$. Per frequenze $|f| > f_{3\mathrm{dB}}$ il filtro è approssimativamente equivalente ad un derivatore. Quindi il segnale preenfatizzato è la somma del segnale originale e della sua derivata. Di conseguenza il segnale modulato è circa

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t \left(m(\tau) + \frac{1}{f_{3\text{dB}}}\frac{dm(\tau)}{d\tau}\right) d\right)$$
$$= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau + 2\pi \frac{k_f}{f_{3\text{dB}}} m(t)\right).$$

Il segnale FM preenfatizzato è in realtà una combinazione delle modulazioni di frequenza e fase.

La potenza di rumore con il filtro di deenfasi è data da

$$P_{N_{de,0}} = \int_{-W}^{W} S_{N_{\text{de},0}}(f)df = \frac{N_0}{A_c^2}\int_{-W}^{W}\frac{f^2}{1+f^2/f_{3\text{dB}}^2}df = \frac{2N_0 f_{3\text{dB}}^3}{A_c^2}\left[\left(\frac{W}{f_{3\text{dB}}}\right) - \arctan\left(\frac{W}{f_{3\text{dB}}}\right)\right].$$

Il miglioramento che deriva dall'impiego del filtro di deenfasi è dato dal rapporto tra la potenza del rumore $P_{N_{de,0}}$ appena calcolata e la potenza del rumore P_{N_0} senza filtro di deenfasi data nella (15.7)

$$I = \frac{P_{N_0}}{P_{N_{de,0}}} = \frac{\left(\dfrac{W}{f_{3\text{dB}}}\right)^3}{3\left[\left(\dfrac{W}{f_{3\text{dB}}}\right) - \arctan\left(\dfrac{W}{f_{3\text{dB}}}\right)\right]}.$$

Nella diffusione commerciale FM in Nord America, tipicamente si ha $f_{3\text{dB}} = 2.122$ kHz, e si può ragionevolmente assumere $W = 15$ kHz. Questo insieme di valori produce $I = 22$ che corrisponde ad un miglioramento di 13 dB dopo la demodulazione nel ricevitore. Questo esempio mostra che, usando i filtri di preenfasi e di deenfasi realizzati con semplici circuiti RC, è possibile ottenere un significativo miglioramento delle prestazioni nei confronti del rumore di un sistema FM.

Si consideri la trasmissione di 5000 canali telefonici in modulazione di frequenza FM con deviazione di frequenza efficace $\Delta f_e = 17.5$ MHz, erogando una potenza media di $200\,\text{mW}$. Il mezzo trasmissivo introduce un'attenuazione di $80\,\text{dB}$. All'ingresso del ricevitore è presente un rumore AWGN a valor medio nullo e densità spettrale di potenza $N_0/2$. La qualità del segnale all'uscita del demodulatore deve essere tale da garantire un rapporto segnale-rumore di 32 dB: si determini la larghezza di banda del segnale trasmesso, il valore massimo di N_0 ed il valore del rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore.

Soluzione

L'espressione del segnale FM trasmesso è del tipo

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau\right)$$

dove A_c è l'ampiezza della portante, f_c è la frequenza della portante, k_f è il *fattore di sensibilità in frequenza* del modulatore e $m(t)$ è il segnale modulante. La potenza media del segnale trasmesso è

$$P_T = \frac{A_c^2}{2}.$$

Il valore approssimato della banda del segnale trasmesso si ottiene applicando la regola di Carson

$$B_T = 2\Delta f_p + 2W,$$

in cui Δf_p corrisponde al valore di picco della deviazione di frequenza e W è la massima frequenza del segnale modulante (ovvero la sua banda). Poiché ciascun canale telefonico ha una banda di 4 kHz, la banda complessiva del segnale modulante costituito da 5000 canali telefonici risulta essere

$$W = 5000 \cdot 4 \cdot 10^3 = 20\,\text{MHz}.$$

Per determinare il valore di picco della deviazione di frequenza è necessario avere delle informazioni sulla densità di probabilità delle ampiezze del segnale modulante per ottenere il fattore di cresta c definito come il rapporto[1]

$$c = \frac{|m(t)|_p}{\sqrt{\overline{m^2(t)}}}$$

[1] Nell'ipotesi che $m(t)$ sia simmetrico rispetto allo 0.

dove $|m(t)|_p$ e $\sqrt{\overline{m^2(t)}}$ sono, rispettivamente, il valore di picco e il valore efficace[2] del segnale $m(t)$. la potenza media del segnale $m(t)$. Ad esempio, se il segnale avesse distribuzione uniforme delle ampiezze tra $-V$ e $+V$ il fattore di cresta sarebbe

$$c = \frac{V}{V/\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Nel caso di un segnale gaussiano convenzionalmente si assume per il fattore di cresta il valore superato nell'1‰ dei casi, ottenendo:

$$c \approx \sqrt{10}.$$

Il fattore di cresta sarebbe infatti uguale ad infinito nel caso di segnale gaussiano con ampiezza non limitata ma questo non sarebbe realistico. Assumendo che il segnale considerato nell'esercizio abbia una densità di probabilità delle ampiezze gaussiana, la deviazione di picco della frequenza sarà pari a

$$\Delta f_p = k_f |m(t)|_p = k_f \cdot c \cdot \sqrt{\overline{m^2(t)}} = c \cdot \Delta f_e = \sqrt{10} \cdot \Delta f_e.$$

La banda di Carson è dunque pari a

$$B_C = 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \Delta f_e + 2 \cdot W = 110 \cdot 10^6 + 40 \cdot 10^6 \approx 150 \text{ MHz}.$$

Tenendo conto dell'attenuazione introdotta dal mezzo trasmissivo, il rapporto segnale rumore all'ingresso del ricevitore è pari a

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{pre}}^{\mathrm{FM}} = \frac{P_R}{N_0/2 \cdot 2B_C} = \frac{P_T}{10^8} \cdot \frac{1}{N_0 B_C}.$$

Per calcolare il rapporto segnale-rumore dopo la demodulazione è necessario calcolare la potenza del rumore. La densità spettrale di potenza $S_{N_0}(f)$ del rumore $n_0(t)$ che compare all'uscita del ricevitore è definita da

$$S_{N_0}(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0 f^2}{A_c^2/10^8}, & |f| < W \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

La potenza media di rumore uscente è calcolata integrando la densità spettrale di potenza $S_{N_0}(f)$ da $-W$ a W ed è pari a

[2] $\overline{m^2(t)}$ corrisponde alla potenza media del segnale.

$$P_{N_0} = \int_{-W}^{W} S_{N_0}(f)df = \frac{N_0}{A_c^2}\int_{-W}^{W} f^2 df = \frac{2\cdot 10^8 N_0 W^3}{3A_c^2}. \tag{15.7}$$

Il rapporto segnale-rumore dopo la demodulazione è pari a

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{post}}^{\mathrm{FM}} = \frac{\Delta f_e^2}{P_N} = \frac{3A_c^2 \Delta f_e^2}{2\cdot 10^8 N_0 W^3} = \frac{3P_T \Delta f_e^2}{10^8 N_0 W^3}.$$

Affinché si abbia

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{post}}^{\mathrm{FM}}\Big|_{\mathrm{dB}} \geq 32\,\mathrm{dB}$$

il valore massimo tollerabile per N_0 deve soddisfare la condizione

$$\begin{aligned} N_0\big|_{dB} &\leq \Delta f_e^2\big|_{dB} + P_T\big|_{dB} + 4.77 - 80 - W^3\big|_{dB} - 32 \\ &= 145 - 7 + 4.77 - 80 - 219 - 32 = -188.23\ \mathrm{dB/Hz}. \end{aligned}$$

Il valore del rapporto segnale-rumore all'ingresso del demodulatore di frequenza è

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{pre}}^{\mathrm{FM}} = P_T\big|_{dB} - 80 - N_0\big|_{dB} - B_C\big|_{dB} = -7 - 80 + 188.23 - 81.76 = 19.47$$

Se si utilizza la convenzione di misurare il rumore sia all'ingresso che all'uscita del demodulatore in una banda pari a quella del segnale modulante si può evidenziare il guadagno della modulazione di frequenza

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{post}}^{\mathrm{FM}} = \frac{3\Delta f_e^2}{W^2}\cdot\frac{P_T}{10^8 N_0 W} = \frac{3\Delta f_e^2}{W^2}\cdot \mathrm{SNR}_{\mathrm{ref}}$$

dove $\mathrm{SNR}_{\mathrm{ref}} = \dfrac{P_T}{10^8 N_0 W}$. Il guadagno è pari a

$$\frac{\mathrm{SNR}_{\mathrm{post}}^{\mathrm{FM}}}{\mathrm{SNR}_{\mathrm{ref}}} = \frac{3\Delta f_e^2}{W^2} \approx 3.6\,\mathrm{dB}.$$